ЧАСТЬ II
УСТОЙЧИВОСТЬ СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА

Глава 4
Оценка устойчивости – критерии устойчивости

§ 4.1. Общая оценка устойчивости

Режим работы энергосистемы может быть описан системой дифференциальных уравнений, в которой обобщенными координатами, характеризующими ее состояние, являются электрические параметры режима. Их непрерывное изменение во времени приводит к возникновению переходных процессов. Возникает задача изучения устойчивого функционирования энергосистемы.

Задача об отыскании критериев устойчивости технических систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями произвольно высокого порядка, была поставлена Максвеллом в 1868 году и решена Раусом в 1873 году для уравнений четвертой и пятой степени, а в 1877 году – полностью [6]. Классическое исследование теории устойчивости выполнил А.М. Ляпунов [7].

Движение системы считается устойчивым, если все отклонения от начального значения координат движения с течением времени исчезают. Природа возмущающих сил не принимается во внимание, считается, что подействовав, они прекращают свое действие и в дифференциальных уравнениях не учитываются.

Вообще говоря, технические системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Однако для систем нелинейных дифференциальных уравнений общих методов решения нет.

Поэтому возникает задача сведения системы нелинейных дифференциальных уравнений к хорошо изученным системам линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$a_0 \frac{d^n\xi}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}\xi}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{d\xi}{dt} + a_n\xi = F_i(t)\,. \qquad (4.1)$$

Это возможно при соблюдении следующих условий:

▪ возмущающие силы $F_i(t)$ во времени мало изменяются;

▪ мало изменяются во времени параметры режима ξ и их производные $\xi', \xi'', \ldots$.

Сведение нелинейной системы к линейной заключается в ее линеаризации в точке рассмотрения режима – t_0;

- нелинейные функции возмущения представляются линейными функциями, при условии, если

$$\left| F_i(t) - F_i(t_0) \right| = f_i(t) < \varepsilon ;$$

- координаты процесса заменяются линейными функциями в точке t_0, при условии, если

$$\left| \xi_i(t) - \xi_{i0} \right| < \varepsilon , \ \left| \xi_i'(t) \right| < \varepsilon , \ \left| \xi''(t) \right| < \varepsilon .$$

Таким образом, изучение влияния внешних возмущений на переходный процесс в системе сводится к изучению вида решений системы дифференциальных уравнений (4.1) при различных $F_i(t)$, причем коэффициенты $a_i (i = 1,...,n)$ также зависят от внешних возмущающих сил F_{i0}.

Введем замену переменных

$$x_i(t) = \xi_i(t) - \xi_{i0} .$$

Тогда

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} , \ \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{d^2 x_i}{dt^2} \text{ и т. д.}$$

Система (4.1) преобразуется к виду

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dx_i}{dt} + a_n x = f_i(t) . \qquad (4.2)$$

Состоянию равновесия системы (4.1) соответствует состояние равновесия системы (4.2) при

$$x_i = 0, \quad f_i(t) \equiv 0.$$

Течение процесса во времени описывается соответствующим набором функций $f_i(t)$ и координат процесса $x_i(t)$.

Возможны два решения этой задачи:

- получение решения в аналитическом виде;
- получение характера изменений координат движения во времени без решения задачи.

В общем случае оценка устойчивости системы сводится к определению знаков действительных частей корней характеристического уравнения (4.2). Вычисление корней весьма просто лишь для характеристических уравнений первой и второй степени. Общие выражения для корней уравнений третьей и четвертой степени известны, но они громоздки и практически не удобны. Уравнения более высоких степеней вообще не имеют общих выражений для корней. Поэтому важное значение имеют методы, которые позволяют определить устойчивость или неустойчивость системы, минуя вычисление корней – метод Рауса–Гурвица [21].

Задача определения условий, при которых значения координат движения x были бы определены без необходимости интегрирования вышеуказанной системы уравнений была поставлена Лагранжем.

В некоторых частных случаях эта задача решалась при помощи начал Лагранжа о minimum'е потенциала на основе первого приближения, при котором в разложении функции $x_к$ отбрасывались все члены, содержащие величины x в степени выше первой. Однако иногда оказывалось, что движение, устойчивое в первом приближении, являлось неустойчивом в действительности.

А.М. Ляпунов, основываясь на начале Лагранжа о minimum'е потенциала, дал решение задачи при помощи метода последовательных приближений и указал те случаи, в которых первое приближение действительно решает вопрос об устойчивости [7]. Однако, А.М. Ляпунов указал, что в его сочинении нет решения каких-либо определенных механических задач, и считал, что для иллюстрации разработанных методов достаточно примеров аналитического характера. Вместе с тем А.М. Ляпунов предполагал дополнить свое сочинение, состоящее из трех глав, четвертой главой, в которой помещались бы в качестве иллюстраций решения определенных механических задач.

При проектировании систем автоматического регулирования обращаются к критерию Найквиста–Михайлова [21]. Дело в том, что критерии Рауса–Гурвица просты для исследования систем, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями невысокого порядка, но если необходимо установить влияние параметра системы на устойчивость, то задача при дифференциальных уравнениях 5-го порядка и выше становится практически невыполнимой, так как устойчивость системы выражается сложной комбинацией коэффициентов уравнения, а последние – сложные функции параметров системы.

В таких случаях более удобным методом определения устойчивости является амплитудно-фазный критерий Найквиста–Михайлова. Этот критерий удобен тем, что позволяет судить об устойчивости замкнутой системы автоматического регулирования при помощи характеристик разомкнутой системы, а также по экспериментальной характеристике последней, что значительно упрощает расчеты о взаимосвязи. Далее этот критерий не описывается, так как задачи по назначению параметров автоматических систем регулирования здесь не решаются.

Практически задача расчета устойчивости энергосистем решается математическим моделированием режимов на заданной модели энергосистемы, включающей в себя описание схемы соединений элементов энергосистемы и их математическое представление, отражающее электрическую сущность происходящих процессов.

§ 4.2. Критерий устойчивости Рауса

Критерий дан в форме алгоритма, определяющего последовательность математических операций, необходимых для решения задачи, описанной характеристическим уравнением n -й степени

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 .$$

Раус предложил выполнять алгоритм в виде таблицы (табл. 4.1.), которая составлена здесь в виде примера для характеристического уравнения седьмой степени.

Таблица 4.1

	a_0	a_2	a_4	a_6
	a_1	a_3	a_5	a_7
$r_0 = \dfrac{a_0}{a_1}$	$c_{13} = a_2 - r_0 a_3$	$c_{23} = a_4 - r_0 a_5$	$c_{33} = a_6 - r_0 a_7$	$c_{43} = a_8 - r_0 a_7$
$r_1 = \dfrac{a_1}{c_{13}}$	$c_{14} = a_3 - r_1 c_{23}$	$c_{24} = a_5 - r_1 c_{33}$	$c_{34} = a_7 - r_1 c_{43}$	$c_{44} = a_9 - r_1 c_{53}$
$r_2 = \dfrac{c_{13}}{c_{23}}$	$c_{15} = c_{23} - r_2 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_2 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - r_2 c_{44}$	$c_{45} = c_{44} - r_2 c_{54}$
……	…………	……………	…………	…………

Таблица наглядная и не требует дополнительных пояснений последовательности вычислений.

Критерий устойчивости Рауса гласит: для того, чтобы движение системы было устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты первой графы таблицы были положительны, т. е. $a_0 > 0, a_1 > 0, c_{13} > 0, c_{14} > 0, ..., \ c_{1n+1} > 0.$

Критерий Рауса особенно удобен, когда коэффициенты характеристического уравнения заданы численно.

В качестве примера для уравнения
$0{,}104\lambda^7 + 0{,}33\lambda^6 + 5{,}5\lambda^5 + 15{,}5\lambda^4 + 25\lambda^3 + 25\lambda^2 + 19{,}7\lambda + 9{,}5 = 0$ таблица Рауса (табл. 4.1) заполняется численными значениями коэффициентов как показано в табл. 4.2 [21].

Таблица 4.2

	$a_0 = 0{,}104$	$a_2 = 5{,}5$	$a_4 = 25$	$a_6 = 19{,}7$
	$a_1 = 0{,}33$	$a_3 = 15{,}5$	$a_5 = 25$	$a_7 = 9{,}5$
$r_0 = 0{,}315$	0,6	17,1	16,7	0
$r_1 = 0{,}55$	6,0	15,8	9,5	0
$r_2 = 0{,}1$	15,52	15,75	0	0
$r_3 = 0{,}386$	9,7	9,5	0	0
$r_4 = 1{,}6$	0,55	0	0	0

Так как все коэффициенты первой графы положительны, то все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части и, следовательно, эта система устойчива.

§ 4.3. Критерий устойчивости Гурвица

Критерий Гурвица получается из критерия Рауса.

Если дано характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

то его корни имеют отрицательные вещественные части тогда, когда определитель Гурвица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1\ a_3\ a_5 \ldots\ldots\ldots\ 0 \\ a_0\ a_2\ a_4 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0\ \ a_1\ \ a_3 \ldots\ldots\ldots\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ a_{n-2}\ \ a_n \end{vmatrix} \qquad (4.3)$$

и все его диагональные миноры

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \ldots$$

будут одного знака с a_0, т. е. должны быть положительными – в этом случае движение системы устойчиво.

Иными словами: для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a_0 > 0$ и определители Гурвица $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta n_n$ были положительны.

Правило составления определителя Гурвица n-го порядка следующее [43]

- выписываются по главной диагонали все коэффициенты уравнения от a_1 до a_n в порядке возрастания индексов – см. (4.3);
- дополняются столбцы вверх от элементов диагонали, вписывая в столбец коэффициенты с последовательно возрастающими индексами;
- дополняются столбцы вниз от элементов диагонали, вписывая в столбец коэффициенты с последовательно убывающими индексами;
- на место коэффициентов, индексы которых больше чем n проставляют нули.

Например, для характеристических уравнений до четвертого порядка критерий устойчивости Гурвица записывается так:

- для уравнения

$$a_0\lambda + a_1 = 0$$

должно быть

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0,$$

т. е. для устойчивости системы, движение которой описывается дифференциальным уравнением первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительны;

- для уравнения

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

должно быть

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1\, a_2 > 0\,;$$

- для уравнения

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

должно быть

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1\, a_2 - a_0\, a_3 > 0\,,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3\ \Delta_2 > 0\,;$$

▪ для уравнения

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

должно быть

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1\ a_2 - a_0 a_3 > 0\,,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3\Delta_2 - a_1\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1\ a_2\ a_3 - a_1^2 a_4 - a_0^2\ a_3 > 0\,,$$

$$\Delta_4 = a_4\Delta_3 > 0.$$

Заметим, что аналитические критерии устойчивости Рауса и Гурвица для уравнений высокого порядка определяют устойчива ли система, но если окажется, что система неустойчива, то критерии не дают ответа как изменить параметры системы для обеспечения ее устойчивости.

§ 4.4. Устойчивость по Ляпунову

В предисловии к своему сочинению А.М. Ляпунов [7] указал, что существуют случаи, когда рассматриваемая задача допускает приведение к некоторой задаче о maxima'x и minima'x, и понимал под этим те случаи, к которым приложима известная теорема Лагранжа о maxima'x силовой функции, касающаяся вопросов об устойчивости равновесия, или более общая теория Рауса о maxima'x и minima'x известных интегралов дифференциальных уравнений движения, позволяющих решать некоторые вопросы об устойчивости. Однако область вопросов, которые могут быть разрешимы таким путем, весьма ограничена, и в большинстве случаев необходимо прибегать к каким-либо иным методам. Эти методы в общем виде изложены далее.

Первый метод Ляпунова

Имеются приведенные к нормальной форме Коши дифференциальные уравнения системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots x_n, t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где x_i – координаты системы; X_i – некоторые нелинейные функции; t – параметр, отражающий действие изменяющихся во времени внешних сил или параметров системы.

Если считать, что функции X_i таковы, что при заданных начальных условиях $x_i(t_0) = x_{i0}$ (где t_0 – произвольный момент времени) имеется единственное решение уравнения

$$x_i = x_i^*(t),$$

то оно может быть принято за невозмущенное движение системы. Всякое другое движение называется возмущенным движением.

Невозмущенное движение с инженерной точки зрения является расчетным движением системы. Внешние возмущения могут привести к отклонениям системы от расчетного движения, от равновесного состояния.

Возмущения могут быть в виде:

- изменения внешних сил в момент времени t_0;
- изменения начальных условий, когда вместо заданной совокупности начальных условий имеем $x_i(t_0) = x_{i0} + \Delta x_{i0}$, где Δx_{i0} – возмущение.

Если решение уравнений (4.1) будет

$$x_i = x_i(t),$$

то отклонения (вариации) процесса движения

$$\delta x_i = x_i - x_i^*$$

являются функциями времени. Если с течением времени эти вариации стремятся к нулю, то рассматриваемое невозмущенное движение является асимптотически устойчивым, то есть невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если

$$\lim_{t \to \infty} (\delta x_i) = 0.$$

В автономных системах выделяются два вида движения:

- свободные движения – при отсутствии внешних сил

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

- несвободные движения – под действием внешних сил $f_i(t)$

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_i(t),$$

где при $t < t_0$ $f_i(t) \equiv 0$, т. е. внешняя сила действует с момента t_0, а затем исчезает.

Исследования устойчивости состояния равновесия наиболее просто оказываются в случае, когда функции X_i являются аналитическими функциями, допускающими разложения в степенные ряды. В этом случае при малых отклонениях оказывается возможным исключить члены рядов выше первого порядка и исследовать линейные уравнения первого приближения.

Рассмотрение устойчивости системы с помощью уравнений первого приближения (линеаризованных уравнений) составляет содержание первого метода Ляпунова.

Например, имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \;\; (i = 1, 2, ..., n), \tag{4.4}$$

где f_i – дифференцируемые в окрестности начала координат функции, $f_i(t, 0, 0, ..., 0) \equiv 0$.

Исследуем на устойчивость точку покоя $x_i \equiv 0 \;\; i = 1, 2, ..., n$ системы (4.4). Представим систему в окрестности начала координат в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) x_j + R_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \;\; (i = 1, 2, ..., n), \tag{4.5}$$

где R_i имеют порядок выше первого относительно $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (т. е. фактически первые члены (4.4) разложены по формуле Тейлора по x в окрестности начала координат). Вместо точки покоя (4.4) исследуем на устойчивость ту же точку покоя линейной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) x_j \;\; (i = 1, 2, ..., n), \tag{4.6}$$

называемой *системой уравнений первого приближения* для системы (4.4). В этом и состоит метод исследования на устойчивость системы (4.4) по первому приближению. Ограничимся для простоты случаем, когда коэффициенты $a_{ij}(t)$ в (4.6) постоянные. В этом случае говорят, что система (4.5) стационарна в первом приближении.

Теорема 1. Если система уравнений (4.5) *стационарна в первом приближении, все члены* R_i *ограничены по t, разлагаются в ряды по степеням* $x_1, ..., x_n$ *в некоторой области* $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le D$*, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка и все корни характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.7)$$

имеют отрицательные действительные части, то тривиальные решения $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, ..., n$) *системы* (4.5) *и системы* (4.6) *асимптотически устойчивы, т. е. в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.*

Теорема 2. Если система уравнений (4.5) *стационарна в первом приближении, все функции* R_i *удовлетворяют условиям теоремы 1 и хотя бы один из корней характеристического уравнения* (4.7) *имеет положительную действительную часть, то точки покоя* $x_i \equiv 0$ *(*$i = 1, 2, ..., n$*)* *системы* (4.5) *и системы* (4.6) *неустойчивы, т. е. и в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.*

Замечание. Если действительные части всех корней характеристического уравнения (4.7) неположительные, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, то исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно (в этом случае начинают влиять нелинейные члены R_i).

Второй, прямой метод Ляпунова

Этот метод основан на использовании специальных функций, называемых функциями Ляпунова, с помощью которых исследуется устойчивость равновесного состояния системы, и в этом случае нет необходимости рассматривать бесконечно малую окрестность точки равновесия.

Имеем вещественную функцию $V(t, x_1, ..., x_n)$ вещественных переменных $t, x_1, ..., x_n$, однозначную, непрерывную в области $t \ge t_0 > 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le D$ и обращающуюся в нуль, когда $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$.

Функция $V(t, x_1, ..., x_n)$ называется знакопостоянной, если она принимает, кроме нулевых, значения только одного знака при достаточно большом t_0 и при достаточно малом D. Такие функции называются постоянно-положительными или постоянно-отрицательными. Например, функция $V = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \sin t$ является постоянно-положительной (кроме нулевых, она принимает только положительные значения).

Если знакопостоянная функция V не зависит от t, а величина D может быть выбрана столь малой, что $V = 0$ только при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, то функция $V(t, x_1, ..., x_n)$ называется знакоопределенной (определенно-положительная или определенно-отрицательная). Например, функция $V = x_1^2 + ... + x_n^2$ – определенно-положительная.

Знакопостоянная функция V, зависящая явно от t, называется знакоопределенной, если найдется такая не зависящая явно от t знакоопределенная функция W, что одно из двух выражений $V - W$ или $-V - W$ представляет постоянно-положительную функцию. Так, функция $V = 2x_1x_2 \cos t - t(x_1^2 + x_2^2)$ – определенно-отрицательная (для нее $W = x_1^2 + x_2^2$).

Если имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{4.8}$$

то вопрос об устойчивости тривиального решения системы может быть решен с помощью следующих теорем.

I. Теорема 1. Если дифференциальные уравнения (4.8) *таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию* V*, производная которой* $\frac{dV}{dt}$ *в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с* V*, или тождественно равной нулю, то тривиальное решение устойчиво. Производная* $\frac{dV}{dt}$ *системы* (4.8), *имеет вид*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1, ..., x_n).$$

II. Дополнение Ляпунова об асимптотической устойчивости. Определение. Если ограниченная функция $g(t, x_1, ..., x_n)$ такова, что для всякого $\varepsilon > 0$, как бы оно ни было мало, найдется такое число $\delta > 0$, что при $t \geq t_0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \delta$ будет выполняться неравенство $|g(t, x_1, ..., x_n)| < \varepsilon$, то принимается, что g допускает бесконечно малый высший предел.

Замечание. Всякая не зависящая явно от t непрерывная функция g допускает бесконечно малый высший предел.

Теорема 2. Если знакоопределенная функция V допускает бесконечно малый высший предел, а ее производная $\frac{dV}{dt}$, составленная в силу системы (4.8), *является знакоопределенной функцией противоположного знака, то тривиальное решение асимптотически устойчиво.*

По сути, А.М. Ляпунов предложил для исследования устойчивости системы использовать вспомогательные функции координат фазового пространства $x_1, x_2, ..., x_n$ вида

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = C = \text{const},$$

названная функцией Ляпунова.

При некотором постоянном значении C в фазовом пространстве функция Ляпунова представляет замкнутую поверхность, охватывающую точку равновесного состояния системы. При различных значениях C имеет место семейство вложенных друг в друга поверхностей. При уменьшении C поверхности стягиваются к началу координат, и в пределе при $C = 0$ превращаются в точку – начало координат – точку равновесного состояния (рис. 4.1) [7].

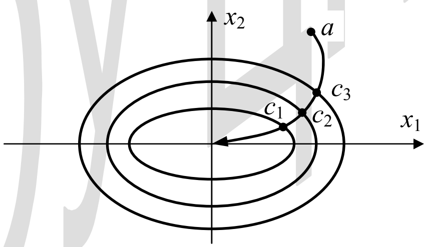

Рис. 4.1. Иллюстрация анализа устойчивости системы по прямому методу Ляпунова

В соответствии с теоремой Лагранжа об устойчивости любой системы, когда в точке равновесного состояния ее потенциальная энергия имеет минимум, можно представить, что по мере удаления от начала координат энергетические уровни поверхностей вокруг равновесного состояния возрастают. Следовательно, если при движении изображающей точки системы в фазовом пространстве a (рис. 4.1) она наоборот последовательно перемещается с поверхностей высокого энергетического уровня к поверхности более низкого уровня, то система при своем движении будет стремиться к устойчивому равновесному состоянию.

Трудности практического использования прямого метода Ляпунова связаны с тем, что нет точных рекомендаций по подбору V-функций.

Пример 4.1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы прямым методом Ляпунова

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -3y - x^3;\\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 2y^3.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Функция $V = x^2 + y^2$ удовлетворяет условиям теоремы А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости:

1. $V(x, y) \geq 0$, $V(0,0) = 0$.

2. $\dfrac{dV}{dt} = 2x \cdot x' + 2y \cdot y' = 2x(-3y - x^3) + 2y(3x - 2y^3) =$

$$= -6xy - 2x^4 + 6xy - 4y^3 = -(2x^4 + 4y^4) \leq 0 \quad \left(\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, y = 0\right).$$

Следовательно, движение системы при $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво.