

## Приложение 1

### Сопоставление методов расчета напряжений в узлах электрических схем

Подробное сопоставление расчета напряжений в узлах электрической схемы решением системы узловых уравнений методом Гаусса с расчетом напряжений методом эквивалентных преобразований самой схемы проводится на конкретной схеме, представленной на рис. П1.1.

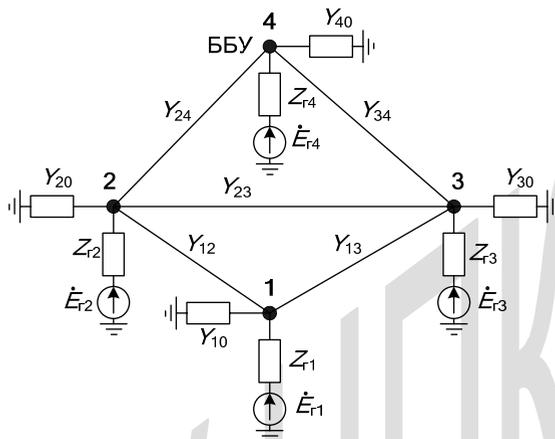


Рис. П1.1. Схема замещения электрической сети

Схема имеет пять узлов. Узлы пронумерованы в порядке исключения узлов из схемы и напряжений узлов из системы узловых уравнений. Узел нулевого потенциала, обозначенный символом «земли», имеет номер 0.

Полагаем, что взаимные проводимости не имеют идеальных трансформаторов, т.е. трансформаторные связи представлены П-схемой замещения, § 1.2, тогда

$$Y_{12} = Y_{21}, \quad Y_{13} = Y_{31}, \quad Y_{23} = Y_{32}, \quad Y_{24} = Y_{42}, \quad Y_{34} = Y_{43}.$$

Проводимости от узлов к точке нулевого потенциала равны сумме проводимостей нагрузки, включенной в узле, и проводимостей П-схем замещения ветвей схемы.

## 1. Расчет напряжений в узлах схемы решением системы узловых уравнений методом Гаусса

Составляем уравнения по первому закону Кирхгофа для всех узлов, кроме узла нулевого потенциала:

$$\begin{cases} (\dot{E}_{r1} - \dot{U}_1)Y_{r1} + (0 - \dot{U}_1)Y_{10} + (\dot{U}_2 - \dot{U}_1)Y_{12} + (\dot{U}_3 - \dot{U}_1)Y_{13} = 0, \\ (\dot{E}_{r2} - \dot{U}_2)Y_{r2} + (0 - \dot{U}_2)Y_{20} + (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)Y_{12} + (\dot{U}_3 - \dot{U}_2)Y_{23} + \\ + (\dot{U}_4 - \dot{U}_2)Y_{24} = 0, \\ (\dot{E}_{r3} - \dot{U}_3)Y_{r3} + (0 - \dot{U}_3)Y_{30} + (\dot{U}_1 - \dot{U}_3)Y_{13} + (\dot{U}_2 - \dot{U}_3)Y_{23} + \\ + (\dot{U}_4 - \dot{U}_3)Y_{34} = 0, \\ (\dot{E}_{r4} - \dot{U}_4)Y_{r4} + (0 - \dot{U}_4)Y_{40} + (\dot{U}_2 - \dot{U}_4)Y_{24} + (\dot{U}_3 - \dot{U}_4)Y_{34} = 0, \end{cases} \quad (\text{П1.1})$$

где  $Y_{r1} = \frac{1}{Z_{r1}}$ ,  $Y_{r2} = \frac{1}{Z_{r2}}$ ,  $Y_{r3} = \frac{1}{Z_{r3}}$ ,  $Y_{r4} = \frac{1}{Z_{r4}}$ .

Назначаем узел 4 базисно-балансирующим узлом (ББУ), исключаем из системы уравнений (П1.1) четвертое уравнение, тогда:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 Y_{11} - \dot{U}_2 Y_{12} - \dot{U}_3 Y_{13} = \dot{J}_{r1}, \\ -\dot{U}_1 Y_{12} + \dot{U}_2 Y_{22} - \dot{U}_3 Y_{23} = \dot{J}_{r2} + \dot{U}_4 Y_{24}, \\ -\dot{U}_1 Y_{13} - \dot{U}_2 Y_{23} + \dot{U}_3 Y_{33} = \dot{J}_{r3} + \dot{U}_4 Y_{34}, \end{cases} \quad (\text{П1.2})$$

где  $\dot{J}_{r1} = \dot{E}_{r1} Y_{r1}$ ,  $\dot{J}_{r2} = \dot{E}_{r2} Y_{r2}$ ,  $\dot{J}_{r3} = \dot{E}_{r3} Y_{r3}$ ,

$Y_{11} = Y_{r1} + Y_{10} + Y_{12} + Y_{13}$ ,  $Y_{22} = Y_{r2} + Y_{20} + Y_{12} + Y_{23} + Y_{24}$ ,

$Y_{33} = Y_{r3} + Y_{30} + Y_{13} + Y_{23} + Y_{34}$ .

Для решения системы узловых уравнений (П1.2) методом Гаусса на основе параметров схемы в векторах с данными узлов и ветвей, описывающих электрическую схему на рис. П1.1, в ходе топологического анализа схемы формируются симметричная относительно главной диагонали матрица узловых проводимостей

$Y_{11}$	$-Y_{12}$	$-Y_{13}$
$-Y_{12}$	$Y_{22}$	$-Y_{23}$
$-Y_{13}$	$-Y_{23}$	$Y_{33}$

и вектор задающих токов

$\dot{J}_1 = \dot{E}_{r1} Y_{r1}$
$\dot{J}_2 = \dot{E}_{r2} Y_{r2} + \dot{U}_4 Y_{24}$
$\dot{J}_3 = \dot{E}_{r3} Y_{r3} + \dot{U}_4 Y_{34}$

После формирования системы уравнений вектора узлов и ветвей схемы далее не используются. Соединение узлов схемы ветвями определяет структуру сформированной матрицы узловых проводимостей.

### 1.1. Прямой ход метода Гаусса

Приводим систему уравнений к треугольному виду. Для исключения напряжений используются линейные преобразования системы уравнений. Уравнения можно переставлять, масштабировать (умножать на какой-либо коэффициент) и складывать или вычитать. Например, чтобы исключить  $\dot{U}_1$  из второго уравнения, первое уравнение умножается на  $Y_{12}$ , второе на  $Y_{11}$  и полученные уравнения складываются, новое уравнение будет вторым уравнением, и т.д. Такой способ исключения переменных из системы уравнений нельзя напрямую, без дополнительных преобразований новых уравнений, соотносить с исключением самих узлов из схемы.

Классический способ исключения переменных по схеме единственного деления напрямую соотносится с исключением самих узлов из схемы, поэтому ниже рассматривается именно этот способ. Полагая  $Y_{11} \neq 0$ , исключаем  $\dot{U}_1$  из второго и третьего уравнений. Делим первое уравнение на  $Y_{11}$

$$\dot{U}_1 - \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \dot{U}_2 - \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \dot{U}_3 = \dot{J}_{r1} \frac{1}{Y_{11}}. \quad (\text{П1.3})$$

Умножаем уравнение (П1.3) на  $Y_{12}$  и складываем почленно со вторым уравнением, затем умножаем уравнение (П1.3) на  $Y_{13}$  и складываем с третьим уравнением, в результате получим систему уравнений второго порядка относительно  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_3$ :

$$\begin{cases} \left( Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{12}}{Y_{11}} \right) \dot{U}_2 - \left( Y_{23} + \frac{Y_{12}Y_{13}}{Y_{11}} \right) \dot{U}_3 = \dot{J}_{r2} + Y_{24}\dot{U}_4 + \dot{J}_{r1} \frac{Y_{12}}{Y_{11}}, \\ - \left( Y_{23} + \frac{Y_{12}Y_{13}}{Y_{11}} \right) \dot{U}_2 + \left( Y_{33} - \frac{Y_{13}Y_{13}}{Y_{11}} \right) \dot{U}_3 = \dot{J}_{r3} + Y_{34}\dot{U}_4 + \dot{J}_{r1} \frac{Y_{13}}{Y_{11}}. \end{cases} \quad (\text{П1.4})$$

Перепишем систему (П1.4) в виде

$$\begin{cases} Y_{22}^{(1)} \dot{U}_2 - Y_{23}^{(1)} \dot{U}_3 = \dot{J}_2^{(1)}, \\ -Y_{23}^{(1)} \dot{U}_2 + Y_{33}^{(1)} \dot{U}_3 = \dot{J}_3^{(1)}, \end{cases} \quad (\text{П1.5})$$

где  $Y_{22}^{(1)} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{12}}{Y_{11}}, \quad Y_{23}^{(1)} = Y_{23} + \frac{Y_{12}Y_{13}}{Y_{11}}, \quad Y_{33}^{(1)} = Y_{33} - \frac{Y_{13}Y_{13}}{Y_{11}},$

$$\dot{J}_2^{(1)} = \dot{J}_{r2} + Y_{24}\dot{U}_4 + \dot{J}_{r1} \frac{Y_{12}}{Y_{11}}, \quad \dot{J}_3^{(1)} = \dot{J}_{r3} + Y_{34}\dot{U}_4 + \dot{J}_{r1} \frac{Y_{13}}{Y_{11}}.$$

Преобразованные матрица узловых проводимостей и вектор задающих токов приобретают вид:

1	$-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	$-\frac{Y_{13}}{Y_{11}}$
0	$Y_{22}^{(1)} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{12}}{Y_{11}}$	$-\left( Y_{23}^{(1)} = Y_{23} + \frac{Y_{12}Y_{13}}{Y_{11}} \right)$
0	$-\left( Y_{23}^{(1)} = Y_{23} + \frac{Y_{12}Y_{13}}{Y_{11}} \right)$	$Y_{33}^{(1)} = Y_{33} - \frac{Y_{13}Y_{13}}{Y_{11}}$

$\frac{\dot{J}_1}{Y_{11}}$
$\dot{J}_2^{(1)} = \dot{J}_2 + \dot{J}_1 \frac{Y_{12}}{Y_{11}}$
$\dot{J}_3^{(1)} = \dot{J}_3 + \dot{J}_1 \frac{Y_{13}}{Y_{11}}$

Исключив напряжение узла 1 из системы узловых уравнений по схеме единственного деления, можно непосредственно соотнести преобразованную систему уравнений с эквивалентной схемой, в которой исключен узел 1. При вычеркивании первой строки и первого столбца, получается матрица узловых проводимостей и вектор задающих токов для схемы с исключенным узлом 1. При этом преобразуются взаимные

проводимости между узлами 1 и 2, 1 и 3, а также собственные проводимости и задающие токи узлов 2 и 3, смежных узлу 1.

Исключаем из системы уравнений (П1.5) напряжение  $\dot{U}_2$ . Делим первое уравнение на  $Y_{22}^{(1)} \neq 0$ ,

$$\dot{U}_2 - \frac{Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} \dot{U}_3 = j_2^{(1)} \frac{1}{Y_{22}^{(1)}} \tag{П1.6}$$

и умножаем на  $Y_{23}^{(1)}$

$$Y_{23}^{(1)} \dot{U}_2 - \frac{Y_{23}^{(1)} Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} \dot{U}_3 = j_2^{(1)} \frac{Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}.$$

Складывая это уравнение почленно со вторым уравнением системы (П1.5), получим

$$Y_{33}^{(2)} \dot{U}_3 = j_3^{(2)}, \tag{П1.7}$$

где  $Y_{33}^{(2)} = Y_{33}^{(1)} - \frac{Y_{23}^{(1)} Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}$ ,  $j_3^{(2)} = j_3^{(1)} + j_2^{(1)} \frac{Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}$ .

Преобразованные матрица и вектор задающих токов имеют вид:

1	$-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	$-\frac{Y_{13}}{Y_{11}}$
0	1	$-\frac{Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}$
0	0	$Y_{33}^{(2)} = Y_{33}^{(1)} - \frac{Y_{23}^{(1)} Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}$

$\frac{j_1}{Y_{11}}$
$\frac{j_2^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}$
$j_3^{(2)} = j_3^{(1)} + j_2^{(1)} \frac{Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}$

Завершить прямой ход можно преобразованием последнего уравнения в уравнение для напряжений путем деления на  $Y_{33}^{(2)}$ . Напряжение узла  $\dot{U}_3$  равно

$$\dot{U}_3 = \frac{j_3^{(2)}}{Y_{33}^{(2)}}. \quad (\text{П1.8})$$

В результате прямого хода исходные матрица узловых проводимостей и вектор задающих токов теряют свой исходный физический смысл, они преобразованы для расчета напряжений на обратном ходе.

## 1.2. Обратный ход метода Гаусса

Из уравнений (П1.6) и (П1.3) определяются  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_1$

$$\dot{U}_2 = \frac{j_2^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} + \dot{U}_3 \frac{Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}, \quad (\text{П1.9})$$

$$\dot{U}_1 = \frac{j_1}{Y_{11}} + \dot{U}_2 \frac{Y_{12}}{Y_{11}} + \dot{U}_3 \frac{Y_{13}}{Y_{11}}. \quad (\text{П1.10})$$

В общем виде, напряжение  $n$ -го узла

$$\dot{U}_n = \frac{j_n^{(n-1)}}{Y_{nn}^{(n-1)}} + \sum_{(k)} \dot{U}_k \frac{Y_{nk}^{(n-1)}}{Y_{nn}^{(n-1)}}, \quad (\text{П1.11})$$

причем значения  $\frac{j_n^{(n-1)}}{Y_{nn}^{(n-1)}}$  и  $\frac{Y_{nk}^{(n-1)}}{Y_{nn}^{(n-1)}}$  вычисляются еще на стадии прямого хода. При выполнении обратного хода выполняются операции умножения и сложения.

## 2. Расчет напряжений в узлах методом эквивалентных преобразований электрической схемы. Сопоставление свертки и развертки схемы с прямым и обратным ходом метода Гаусса

В этом методе обрабатываются непосредственно вектора с данными узлов и ветвей схемы. Понятия «матрица узловых проводимостей» и «вектор задающих токов» не используются, такие объекты не формируются. Быстрый доступ к ветвям, соединяющим каждый из узлов со смежными узлами, обеспечивается за счет того, что для каждого узла создается вектор индексов ветвей к смежным узлам, который в ходе преобразований схемы изменяется. Сами ветви и их параметры находятся в векторе ветвей схемы.

При исключении узла:

1) Между каждой парой узлов  $i$  и  $j$ , смежных исключаемому узлу  $n$ , включается дополнительная ветвь, взаимная проводимость новой эквивалентной ветви между узлами  $i$  и  $j$  определяется по формуле

$$Y_{ij}^{(n)} = Y_{ij} + \frac{Y_{in} Y_{jn}}{Y_{nn}}. \quad (\text{П2.1})$$

Новая ветвь добавляется в конец вектора ветвей, а старая ветвь «вычеркивается» из вектора ветвей, т.е. далее при свертке схемы не рассматривается. У узлов  $i$  и  $j$  индекс вычеркиваемой ветви заменяется индексом новой ветви, а если ветви между этими узлами не было, то индекс новой ветви добавляется.

2) Источник тока из исключаемого узла с весовыми коэффициентами переносится в смежные узлы (распределяется между смежными узлами). В каждый из смежных узлов  $i$  при исключении узла  $n$  включается источник тока с параметрами

$$Y_i^{(n)} = Y_n \frac{Y_{in}}{Y_{nn}}, \quad J_i^{(n)} = J_n \frac{Y_{in}}{Y_{nn}}, \quad (\text{П2.2})$$

где  $n$  – номер исключаемого узла,  $i, j$  – номера узлов, смежных исключаемому узлу,  $Y_{in}, Y_{jn}$  – проводимости ветвей между исключаемым узлом и смежными узлами,

$Y_n = Y_{\Gamma n} + Y_{n0} + \sum_{(k)} Y_n^{(k)}$ ,  $J_n = J_{\Gamma n} + \sum_{(k)} J_n^{(k)}$  – проводимость и задающий

ток эквивалентного источника тока в узле  $n$ ,

$Y_n^{(k)}, J_n^{(k)}$  – проводимость и задающий ток источников тока, включенных в узел  $n$  при исключении  $k$ -го смежного узла,

$Y_{nn} = Y_n + \sum_{(i)} Y_{in}$  – собственная проводимость исключаемого узла на текущей стадии эквивалентных преобразований электрической схемы.

$\frac{Y_{in}}{Y_{nn}}$  – весовой коэффициент переноса источника тока из узла  $n$  в узел  $i$ ,

3) Из вектора узлов «вычеркивается» (далее при свертке схемы не рассматривается) исключенный узел  $n$ , для него сохраняются индексы ветвей к смежным узлам в момент исключения. Из вектора ветвей «вычеркиваются» ветви от исключенного узла к смежным узлам, и у каждого из смежных узлов удаляется индекс ветви к исключенному узлу.

В операции исключения узла из схемы фигурирует объект, которого нет в операции исключения напряжения узла из системы узловых уравнений. Это источник тока узла  $n$ , который является одним из лучей многолучевой звезды, преобразуемой в эквивалентный многоугольник. Его параметры  $Y_n$  и  $\dot{J}_n$  можно хранить в векторе узлов среди данных узла или отдельно, это детали реализации.

При развертке схемы в порядке, обратном свертке, напряжение узла  $n$  определяется на основе первого закона Кирхгофа. Значения напряжений в смежных узлах, исключаемых позже узла  $n$ , уже известны, сохранены параметры источника тока  $Y_n, \dot{J}_n$ , сформировавшегося в этом узле при выполнении предшествующих операций исключения части смежных узлов, а также индексы ветвей эквивалентной схемы от узла  $n$  к смежным узлам, что позволяет извлечь их проводимости.

Следует подчеркнуть, что:

- 1) Исключение узла из схемы с использованием формул (П2.1) и (П2.2) является эквивалентным преобразованием схемы в том случае, если  $Y_{gn} \neq 0 + j0$  при  $\dot{J}_{gn} \neq 0 + j0$ . При выводе формул (П2.2) необходимо преобразовать источник ЭДС в источник тока, а такое преобразование определено только для реальных источников ЭДС/тока и для шунтов. Источник тока может быть или нулевым ( $Y_n = 0 + j0$  и  $\dot{J}_n = 0 + j0$ ), или реальным (иметь собственное сопротивление/проводимость и ЭДС/задающий ток).
- 2) Если генераторы и/или нагрузки в этих узлах представлены идеальными источниками тока для операции исключения напряжения узла из системы узловых уравнений не существует соответствующего эквивалентного преобразования самой схемы.

## 2.1. Свертка схемы к базисному узлу

В векторе ветвей хранятся проводимости ветвей:

Индекс	Начальный-Конечный	Проводимость
0	1-2	$Y_{12}$
1	1-3	$Y_{13}$
2	2-3	$Y_{23}$
3	2-4	$Y_{24}$
4	3-4	$Y_{34}$

Перед сверткой схемы формируются начальные значения источников тока узлов. В векторе узлов хранятся источники тока и другие параметры узлов:

№ узла, индекс	Данные узла			
	$\dot{J}_n$	$Y_n$	$Y_{nn}$	...
0	0	0	0	0
1	$\dot{J}_1 = \dot{J}_{r1}$	$Y_1 = Y_{r1} + Y_{10}$	0	
2	$\dot{J}_2 = \dot{J}_{r2}$	$Y_2 = Y_{r2} + Y_{20}$	0	
3	$\dot{J}_3 = \dot{J}_{r3}$	$Y_3 = Y_{r3} + Y_{30}$	0	
4	$\dot{J}_4 = \dot{J}_{r4}$	$Y_4 = Y_{r4} + Y_{40}$	0	

При исключении узла 1 в смежные узлы 2 и 3 включаются дополнительные источники тока. Узел 1 «вычеркивается» из вектора узлов, далее при свертке схемы больше не рассматривается («вычеркивание» обозначается штриховкой).

№ узла, индекс	Данные узла			
	$\dot{J}_n$	$Y_n$	$Y_{nn}$	...
0	0	0	0	0
1	$\dot{J}_1$	$Y_1$	$Y_{11} = Y_1 + Y[0] + Y[1]$	
2	$\dot{J}_{2+} = \dot{J}_1 \frac{Y[0]}{Y_{11}}$	$Y_{2+} = Y_1 \frac{Y[0]}{Y_{11}}$	0	
3	$\dot{J}_{3+} = \dot{J}_1 \frac{Y[1]}{Y_{11}}$	$Y_{3+} = Y_1 \frac{Y[1]}{Y_{11}}$	0	
4	$\dot{J}_4$	$Y_4$	0	

В таблице операция «+» обозначает объединение собственных источников тока узлов, если они есть, с дополнительными источниками тока, включаемыми в узлы при исключении смежных узлов, в один эквивалентный, [0], [1] – индексы ветвей 1-2 и 1-3 в векторе ветвей,  $Y[0] = Y_{12}$ ,  $Y[1] = Y_{13}$ .

В вектор ветвей добавляется эквивалентная ветвь с индексом 5, а ветви с индексами 0, 1, 2 «вычеркиваются»:

Индекс	Начальный-Конечный	Проводимость
0	1-2	$Y_{12}$
1	1-3	$Y_{13}$
2	2-3	$Y_{23}$
3	2-4	$Y_{24}$
4	3-4	$Y_{34}$
5	2-3	$Y[2] + \frac{Y[0] \cdot Y[1]}{Y_{11}}$

где [0], [1], [2] – индексы ветвей в векторе ветвей.

Очевидно, что система уравнений (П1.4) с исключенным первым уравнением должна соответствовать схеме с исключенным узлом 1. Это соответствие позволяет провести аналогию между операциями исключения напряжения узла из системы уравнений по схеме единственного деления и исключения самого узла из схемы и говорить, что процесс исключения напряжений узлов из системы уравнений эквивалентен процессу исключения соответствующих узлов из схемы. При этом неявно подразумевается, что свертка и развертка схемы есть не что иное, как прямой и обратный ход в методе Гаусса.

Сопоставим операцию исключения напряжения узла 1 из системы уравнений (П1.2) с операцией исключения узла 1 из системы.

При выполнении операции исключения напряжения узла 1 из остальных уравнений системы (П1.2) собственные проводимости узлов 2 и 3, смежных (инцидентных) узлу 1, пересчитываются, т.к. в эквивалентной схеме нет ветвей 1-2 и 1-3, которые были в исходной схеме. Собственные проводимости узлов 2 и 3 изменяются также за счет «распределения» проводимости исключенного источника тока узла 1, если генерация и нагрузка представлены не идеальными источниками тока (задающими токами), а реальными, но в (П1.4) это неочевидно.

Взаимная проводимость между узлами 2 и 3 изменяется, т.к. между этими узлами включается дополнительная ветвь.

Вектор задающих токов узлов также изменяется. К задающим токам узлов 2 и 3, смежных узлу 1, напряжение которого исключается из системы уравнений, добавляются дополнительные задающие токи от «переноса» задающего тока из уравнения узла 1 в уравнения смежных узлов с соответствующими весовыми коэффициентами.

При выполнении операции исключения из схемы узла 1 вычисляется и далее сохраняется неизменной собственной проводимостью узла 1, необходимая для проведения преобразования схемы. Собственные

проводимости узла 2 ( $Y_{22}$ ) и узла 3 ( $Y_{33}$ ) вычислять не нужно, т.к. они потребуются лишь при исключении узлов 2 и 3. Источники тока узлов 2 и 3 объединяются с дополнительными источниками тока, включаемыми в эти узлы при «распределении» источника тока узла 1.

Сходство операций исключения напряжения узла 1 из системы узловых уравнений и исключения узла 1 из схемы:

1) Весовые коэффициенты «переноса» задающего тока из уравнения для исключаемого напряжения в уравнения смежных узлов равны весовым коэффициентам «распределения» источника тока из узла 1 в смежные узлы, сами вычисления при выполнении операций «переноса» и «распределения» различаются.

2) Эквивалентная взаимная проводимость между узлами 2 и 3 вычисляется одинаково.

Отличие сопоставляемых операций:

1) Смысл проводимых преобразований различен. При исключении напряжения узла 1 из системы уравнений (П1.2) первое уравнение из уравнения баланса токов преобразуется в уравнение для напряжений, коэффициент при напряжении первого узла становится равным 1. Часть вычислений по расчету напряжения узла выполняется еще на стадии прямого хода. Это состояние уравнения фиксируется в преобразованных матрице узловых проводимостей и векторе задающих токов, чтобы на обратном ходе найти напряжение узла. Далее напряжение узла 1 *дважды* исключается из уравнений для смежных узлов 2 и 3.

Узел 1 исключается из схемы *один раз*. При исключении узла нет уравнений, нечего преобразовывать, а изменяется сама схема. Вместо исходной схемы получается эквивалентная схема с модифицированными векторами узлов и ветвей. Для выполнения операции вычисляется собственная проводимость узла. Эту проводимость можно даже не запоминать, так как схема при исключении узла «фиксируется», или запомнить, чтобы ее повторно не вычислять при расчете напряжения узла (выигрыш в скорости счета за счет увеличения необходимой оперативной памяти).

2) При исключении напряжения узла 1 *пересчитываются* собственные проводимости узлов 2 и 3, смежных узлу 1 (проводимости узлов определены для исходной схемы). При исключении узла 1 собственные проводимости узлов 2 и 3 *не вычисляются*.

Если вычислить эти проводимости, то они, конечно, должны быть равны собственным проводимостям узлов, полученным при исключении напряжения узла 1,

$$Y_2 + Y[5] + Y[3] = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{12}}{Y_{11}}, \quad Y_3 + Y[5] + Y[4] = Y_{33} - \frac{Y_{13}Y_{13}}{Y_{11}}. \quad (\text{П2.3})$$

Очевидно, что способ определения собственных проводимостей узлов эквивалентной схемы в сравниваемых методах различен. В методе эквивалентных преобразований используется объект «источник тока узла», который необходим для исключения данного узла. Этот источник тока изменяется при исключении смежных узлов, а собственные проводимости узлов вычисляются только *один раз* в момент исключения этих узлов. В методе Гаусса нет в явном виде объекта «источник тока узла», он не нужен и «разнесен» между собственной проводимостью узлов в матрице узловых проводимостей и вектором задающих токов, а собственные проводимости узлов при исключении напряжений смежных узлов пересчитываются неоднократно. Таким образом, исключение узла из схемы требует меньшего количества операций, чем исключение напряжения узла из системы узловых уравнений, составленной для исходной схемы.

3) Узлы 2 и 3 связаны с базисным узлом 4, поэтому в системе узловых уравнений задающие токи этих узлов модифицированы токами  $\dot{U}_4 Y_{24}$  и  $\dot{U}_4 Y_{34}$  от базисного узла. В методе эквивалентных преобразований такая модификация токов  $\dot{J}_2$  и  $\dot{J}_3$  источников тока этих узлов отсутствует. При исключении узлов 2 и 3 нужны источники тока, сформировавшиеся в этих узлах к моменту их исключения от предшествующих операций исключения смежных узлов.

При исключении узла 2 в векторе узлов изменяются источники тока смежных узлов 3 и 4 и «вычеркивается» узел 2,

№ узла, индекс	Данные			
	$\dot{J}_n$	$Y_n$	$Y_{nn}$	...
0	0	0	0	0
1	$\dot{J}_1$	$Y_1$	$Y_{11} = Y_1 + Y[0] + Y[1]$	
2	$\dot{J}_2$	$Y_2$	$Y_{22} = Y_2 + Y[5] + Y[3]$	
3	$\dot{J}_{3+} = \dot{J}_2 \frac{Y[5]}{Y_{22}}$	$Y_{3+} = Y_2 \frac{Y[5]}{Y_{22}}$	$Y_{33} = Y_3 + Y[6]$	
4	$\dot{J}_{4+} = \dot{J}_2 \frac{Y[3]}{Y_{22}}$	$Y_{4+} = Y_2 \frac{Y[3]}{Y_{22}}$	0	

в вектор ветвей добавляется эквивалентная ветвь с индексом 6, а ветви 2-4, 3-4 и 2-3 с индексами 3, 4 и 5 «вычеркиваются».

Индекс	Начальный-Конечный	Проводимость
0	1–2	$Y_{12}$
1	1–3	$Y_{13}$
2	2–3	$Y_{23}$
3	2–4	$Y_{24}$
4	3–4	$Y_{34}$
5	2–3	$Y[2] + \frac{Y[0] \cdot Y[1]}{Y_{11}}$
6	3–4	$Y[4] + \frac{Y[3] \cdot Y[5]}{Y_{22}}$

Теперь, если исключить узел 3 из схемы, исходная электрическая схема будет представлена эквивалентным источником тока в узле свертки 4.

Полная свертка схемы необходима при расчете мгновенного электрического режима на шаге (подшаге) численного интегрирования. Из условия равенства нулю тока этого источника тока можно найти напряжение в узле свертки. В расчетах установившихся режимов при свертке к ББУ с фиксированным вектором напряжения можно остановиться на двухузловой схеме.

На заключительной стадии преобразований схемы, когда из системы уравнений исключаются напряжения узлов, смежных ББУ, и исключаются узлы, смежные ББУ, матрица узловых проводимостей и вектор задающих токов уже не соответствуют векторам узлов и ветвей эквивалентной схемы. В векторе задающих токов фигурируют корректирующие токи от ББУ, которых нет в источниках тока узлов, смежных ББУ. В то же время в матрице узловых проводимостей отсутствуют взаимные проводимости между ББУ и смежными узлами, которые фигурируют в векторе ветвей, так как уравнение балансирующего узла исключено из системы уравнений.

Таким образом, узлы, смежные ББУ, и сам этот узел в сопоставляемых методах обрабатываются по-разному. В методе эквивалентных преобразований ББУ непосредственно участвует в преобразованиях схемы. В него при исключении смежных узлов включаются новые эквивалентные ветви и дополнительные источники тока. В методе Гаусса уравнение ББУ не обрабатывается, токи от базисного узла модифицируют задающие токи смежных узлов.

Детальное сопоставление процедур исключения напряжения узла из системы уравнений и самого узла из электрической схемы показывает, что выражение «процесс исключения напряжений узлов из системы уравнений эквивалентен процессу исключения соответствующих узлов из схемы» является некорректным. Процессы прямого хода метода Гаусса и свертки схемы различаются по своей сути и алгоритмически, конечные результаты этих процессов также различны.

## 2.2. Развертка схемы, определение напряжений в узлах

Из уравнения, составленного по первому закону Кирхгофа для узла 3 в схеме, получившейся после исключения узла 2 (последние две таблицы с векторами узлов и ветвей),

$$(\dot{U}_4 - \dot{U}_3) Y[6] + (0 - \dot{U}_3) Y_3 + \dot{J}_3 = 0,$$

определяется напряжение этого узла

$$\dot{U}_3 = \frac{\dot{J}_3 + \dot{U}_4 Y[6]}{Y_3 + Y[6]} = \frac{\dot{J}_3 + \dot{U}_4 Y[6]}{Y_{33}}. \quad (\text{П2.4})$$

Уравнения (П2.4) и (П1.8) эквивалентны. В основе обоих уравнений лежит I закон Кирхгофа, результаты вычислений по ним одинаковы и, учитывая соотношения (П2.3), их можно привести к одному виду.

Зная напряжения в узлах 4 и 3 и имея эквивалентную схему перед исключением узла 2, можно, составив уравнение по I закону Кирхгофа для узла 2, найти его напряжение, затем, зная напряжения в узлах 4, 3, 2 и имея исходную схему перед исключением узла 1, можно найти напряжение в узле 1. В общем виде

$$\dot{U}_n = \frac{\dot{J}_n + \sum_{(k)} \dot{U}_k Y_{kn}}{Y_{nn}}. \quad (\text{П2.5})$$

Уравнения (П2.5) и (П1.11) эквивалентны, но величины, которые входят в эти уравнения, получены разными методами, а алгоритмы вычислений по этим формулам различны. Вычисления по формуле (П1.11) в классической схеме исключения переменных распределены между прямым и обратным ходами. Вычисления по формуле (П2.5) производятся один раз при развертке схемы. Таким образом, обратный ход при решении системы узловых уравнений и развертка схемы алгоритмически тоже различные процессы.

При свертке-развертке схемы вычисление напряжений узлов требует меньшего количества операций. В методе Гаусса при выполнении прямого хода деление на  $Y_{nn}^{(n-1)}$  в формуле (П1.11) выполняется многократно, а вычисление напряжения по формуле (П2.5) при развертке схемы требует одной операции деления на  $Y_{nn}$ . Обработка собственных проводимостей также выполняется рациональнее, (см. обсуждение формул (П2.3)). Преимущество в количестве вычислительных операций является следствием того, что при свертке-развертке схемы вначале исключаются узлы, а уравнения по I закону Кирхгофа составляются уже в эквивалентных схемах. Можно показать, что эти преимущества сохраняются и в сравнении с другими способами решения системы узловых уравнений (однако они непосредственно не соотносятся с эквивалентными преобразованиями самой схемы).

### 3. Вывод

Метод Гаусса – универсальный метод решения произвольной системы линейных алгебраических уравнений, не зависящий от физического смысла составленной системы уравнений. Метод эквивалентных преобразований основан на правилах эквивалентных преобразований электрических схем, при его реализации не требуется формировать и решать каким-либо методом систему узловых уравнений, но нужно хранить сами эквивалентные схемы. Он применим только к электрическим схемам энергосистем.

В сравниваемых методах расчета напряжений в узлах схемы имеются принципиальные различия в совокупности объектов, необходимых для проведения вычислений, в процедурах формирования и последующей обработки этих объектов, а также в последовательности выполняемых действий.

При решении системы узловых уравнений вначале составляются уравнения по I закону Кирхгофа для всех узлов исходной схемы, за исключением балансирующего узла, формируются слабозаполненная матрица узловых проводимостей и вектор задающих токов. Затем матрица и вектор преобразуются в соответствии с методом решения системы уравнений. Понятие и объект «реальный источник тока узла» не используются.

При свертке-развертке схемы последовательность действий прямо противоположная. Вначале исключаются узлы, причем для исключения генераторных и нагрузочных узлов необходимо генерацию и нагрузку заместить реальными источниками тока, идеальные источники

тока неприменимы. По мере свертки схемы к ББУ новые ветви добавляются в вектор ветвей. Набор эквивалентных схем фиксируется в индексах ветвей от исключаемых узлов к смежным узлам. Затем в порядке, обратном исключению узлов, в эквивалентных схемах для исключаемых узлов составляются уравнения по I закону Кирхгофа и определяются напряжения в этих узлах. Понятия и объекты «слабозаполненная матрица узловых проводимостей» и «вектор задающих токов» не используются, зато необходим «реальный источник тока узла».

Из этих основных различий методов вытекают различия в процедурах исключения напряжения узла из системы уравнений и исключения узла из схемы, различия в обработке базисного и балансирующего узлов, различия в процедурах обратного хода и развертки схемы с расчетом напряжений и, как следствие, требуемое количество математических операций.

Таким образом, и по своей сути, и алгоритмически свертка и развертка схемы не является прямым и обратным ходом решения системы узловых уравнений, составленной для этой схемы, методом Гаусса. Поэтому *безматричному* методу расчета напряжений (и электрического режима схемы), в котором используется свертка-развертка схемы, целесообразно дать собственное название – *метод эквивалентных преобразований*, которое точно отражает его суть.

Сопоставляемые методы следует рассматривать как равноправные и независимые. Нет причинно-следственных связей между ними, ни один из методов не является модификацией другого, основного метода. Формулы для расчета напряжений узлов получаются эквивалентными, поскольку они в обоих методах получены на основе первого закона Кирхгофа, но это не означает, что сами методы (формируемые объекты, процедуры обработки этих объектов и расчета напряжений в узлах) эквивалентны.

Методы можно назвать эквивалентными, подразумевая только идентичность результатов вычислений напряжений в узлах этими методами. Но в этом смысле различные методы решения системы уравнений, имеющие собственные названия, тоже эквивалентны.

Следует специально подчеркнуть, что решение системы узловых уравнений методом Гаусса при замещении генерации и нагрузки в узлах схемы идеальными источниками тока является некорректным. В этом случае для операции исключения напряжения узла из системы узловых уравнений не существует соответствующего эквивалентного преобразования самой схемы.